«ДИФФЕРЕНЦИАЛ функции»

С понятием **производной** тесно связано понятие ***дифференциала функции***, которое играет большую роль в математическом анализе и имеет важные практические приложения.

1. Бесконечно малая функция.

<u>**Определение**</u>**:** Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Бесконечно малые величины можно сравнивать. Для этого используют следующее правило сравнения:

$$\textit{Если}\ \lim_{x \to x_0} \frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|} = \left\{ \right.$$

ПРИМЕРЫ: СРАВНИТЬ ПОРЯДОК МАЛОСТИ ВЕЛИЧИН:

2. Определение дифференциала.

Из определения производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f^{|}(x)$

на основании теоремы о связи понятий бесконечно малой и предела функции можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f^{|}(x) + \alpha(\Delta x)$,где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$,

откуда:

$$\Delta y = f^{|}(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Таким образом, **приращение функции**

состоит из *двух слагаемых*:

- линейное относительно Δx $f^{|}(x)\Delta x$.

- нелинейное – бесконечно малая

величина, более высокого порядка, чем Δx $\alpha(\Delta x)\Delta x$

, -

- **Определение**: ***Дифференциалом функции*** называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, ***равная произведению производной этой функции на приращение аргумента***: $dy = f'(x)\Delta x$ (*)
- **Замечание.** Дифференциал аргумента dx принимают равным приращению аргумента Δx, т.е., dx=Δx

Тогда равенство (*) примет вид:

$$dy = f'(x)\cdot dx$$

Из определения дифференциала функции с одной переменной следует второе определение производной функции:

производная функции есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента:

$$y^{|} = \frac{dy}{dx}$$

3. Свойства дифференциала.

Как видно из определения дифференциала функции с одной переменной, его вычисление опирается на умение вычислять производные функций, а значит, его вычисление опирается на теорию производных функции с одной переменной.

1. *На основании определения дифференциала функции дифференциал постоянной равен 0:*

$$dc = 0.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала:*

$$d(cu) = cdu.$$

3. *Дифференциал алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме дифференциалов слагаемых:*

$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

4. *Дифференциал произведения двух функций равен сумме произведений одной из функций на дифференциал другой:*

$$d(uv) = vdu + udv.$$

5. Дифференциал частного двух функций вычисляется по формуле:

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

6. Свойство инвариантности формы дифференциала (неизменности):

$$dy=f'(u)du$$

т.е., формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от аргумента x рассматривать функцию от зависимой переменной (сложная функция).

4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то принимают, что приращение функции приблизительно равно дифференциалу функции, т.е.,

$$\Delta y \approx dy$$

- Так как $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),\ dy = f'(x)dx,$
- где dx= Δx , то имеет место формула для выполнения приближенных вычислений с помощью понятия дифференциала функции с одной переменной:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f^{|}(x)\cdot \Delta x.$$

Найти дифференциал функции:

$$y = \cos^3 10x;$$

$$y = \sqrt{3x - 8};$$

$$y = \frac{\cos x}{1 + x^2};$$

$$y = \arcsin\left(x^2 + 2\right);$$

$$y = \ln(\cos x);$$

$$y = x \cdot \sin x + tg\, x;$$

ВЫЧИСЛИТЬ ПРИБЛИЖЕННО ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В УКАЗАННОЙ ТОЧКЕ:

$$f(x) = x^{100} \qquad x_0 = 1{,}01$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \qquad x_0 = 1{,}003$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \qquad x_0 = 1{,}03$$

Вычислить приближенно, используя формулу приближенного вычисления значения в данной точке:

$$10^{0,99} \qquad (-0,937)^4 \qquad \sqrt[4]{16,03}$$

$$\ln(0,98) \qquad e^{0,08} \qquad e^{-0,004}$$

Формулы приближенных вычислений, полученные на основании общей формулы приближенных вычислений

$$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n \cdot \alpha$$

$$(x + \alpha)^3 \approx x^3 + 3x^2 \cdot \alpha$$

$$(x + \alpha)^2 \approx x^2 + 2x \cdot \alpha$$

$$\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$$

$$(x - \alpha)^2 \approx x^2 - 2x \cdot \alpha$$

$$\sqrt{\alpha^2 + h} \approx \alpha + \frac{h}{2a}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

Вычислить приближенно, используя одну из приведенных формул:

$$\sqrt[5]{1{,}006}$$

$$(1{,}08)^{10}$$

$$8{,}02^3$$

$$3{,}97^2$$

$$\sqrt{101}$$