

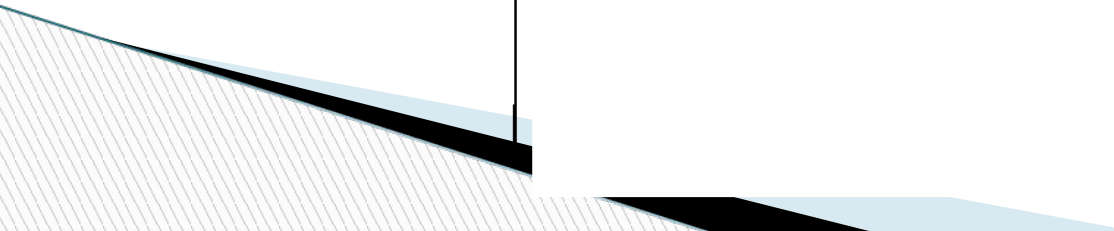
«ДИФФЕРЕНЦИАЛ функции»

С понятием производной тесно связано понятие *дифференциала функции*, которое играет большую роль в математическом анализе и имеет важные практические приложения.

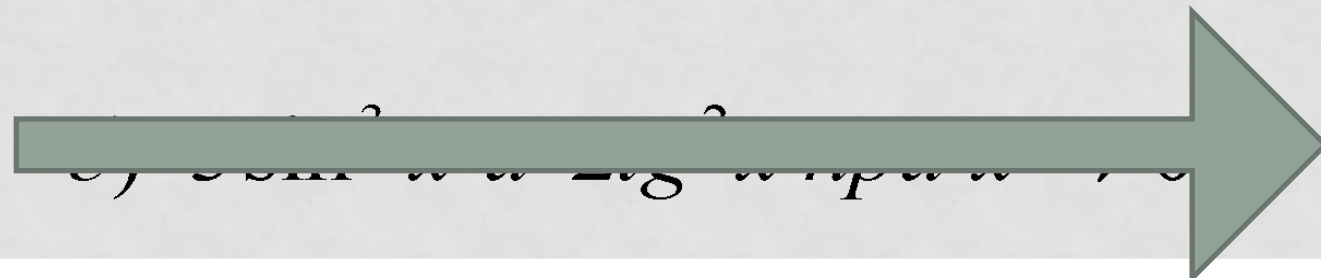
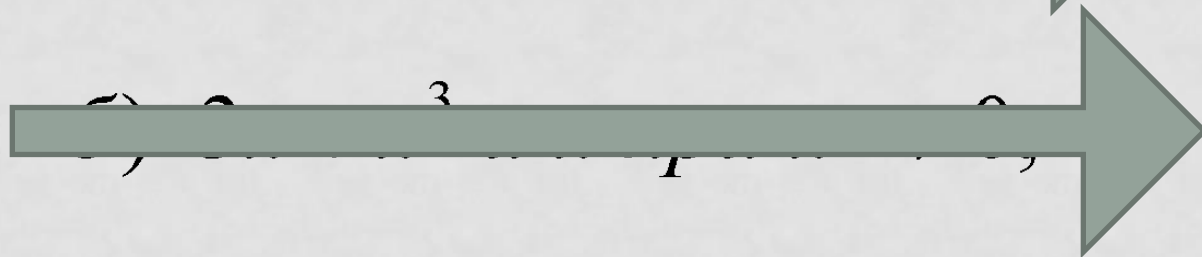
1. Бесконечно малая функция.

Определение: Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

**Бесконечно малые величины
можно сравнивать. Для этого
используют следующее правило
сравнения:**

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$


ПРИМЕРЫ: СРАВНИТЬ ПОРЯДОК МАЛОСТИ ВЕЛИЧИН:



2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА.

Из определения производной $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

на основании теоремы о связи понятий

бесконечно малой и предела функции

можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$

бесконечно малая величина при $\Delta x \rightarrow 0$

откуда: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$

Таким образом, приращение функции

состоит из *двух слагаемых*:

- линейное относительно Δx $f'(x)\Delta x$.

- нелинейное – бесконечно малая

величина, более высокого порядка, чем Δx , $\alpha(\Delta x)\Delta x$

, -

□ Определение: *Дифференциалом функции*

называется главная, линейная относительно Δx

, часть приращения функции, *равная*

произведению производной этой функции

на приращение аргумента: $dy = f'(x)\Delta x$ (*)

□ Замечание. Дифференциал аргумента dx принимают

равным приращению аргумента Δx , т.е., $dx = \Delta x$

Тогда равенство (*) примет вид:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Из определения дифференциала функции с одной переменной следует второе определение производной функции:

производная функции есть

отношение дифференциала

функции к дифференциалу

аргумента:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

3. Свойства дифференциала.

Как видно из определения дифференциала функции с одной переменной, его вычисление опирается на умение вычислять производные функций, а значит, его вычисление опирается на теорию производных функции с одной переменной.

1. *На основании определения дифференциала функции дифференциал постоянной равен 0:*

$$dc = 0.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала:*

$$d(cu) = cdu.$$

3. Дифференциал алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме дифференциалов слагаемых:

$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

4. Дифференциал произведения двух функций равен сумме произведений одной из функций на дифференциал другой:

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

5. Дифференциал частного двух функций вычисляется по формуле:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

6. Свойство инвариантности формы дифференциала (неизменности):

$$dy = f'(u)du$$

т.е., формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от аргумента x рассматривать функцию от зависимой переменной (сложная функция).

4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то принимают, что приращение функции приблизительно равно дифференциалу функции, т.е.,

$$\Delta y \approx dy$$

• Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $dy = f'(x)dx$,

• где $dx = \Delta x$, то имеет место формула для выполнения приближенных вычислений с помощью понятия дифференциала функции с одной переменной:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Найти дифференциал функции:

$$y = \cos^3 10x;$$

$$y = \sqrt{3x - 8};$$

$$y = \frac{\cos x}{1 + x^2};$$

$$y = \arcsin(x^2 + 2);$$

$$y = \ln(\cos x);$$

$$y = x \cdot \sin x + \operatorname{tg} x;$$

**ВЫЧИСЛИТЬ ПРИБЛИЖЕННО
ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В УКАЗАННОЙ
ТОЧКЕ:**

$$f(x) = x^{100} \quad x_0 = 1,01$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 2} \quad x_0 = 1,003$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \quad x_0 = 1,03$$

Вычислить приближенно, используя формулу приближенного вычисления значения в данной точке:

$$10^{0,99}$$

$$(-0,937)^4$$

$$\sqrt[4]{16,03}$$

$$\ln(0,98)$$

$$e^{0,08}$$

$$e^{-0,004}$$

**Формулы приближенных вычислений,
полученные на основании общей
формулы приближенных вычислений**

$$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n \cdot \alpha \qquad (x + \alpha)^3 \approx x^3 + 3x^2 \cdot \alpha$$

$$(x + \alpha)^2 \approx x^2 + 2x \cdot \alpha \qquad \sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$$

$$(x - \alpha)^2 \approx x^2 - 2x \cdot \alpha \qquad \sqrt{\alpha^2 + h} \approx \alpha + \frac{h}{2\alpha}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

Вычислить приближенно, используя одну из приведенных формул:

$$\sqrt[5]{1,006}$$

$$(1,08)^{10}$$

$$8,02^3$$

$$3,97^2$$

$$\sqrt{101}$$